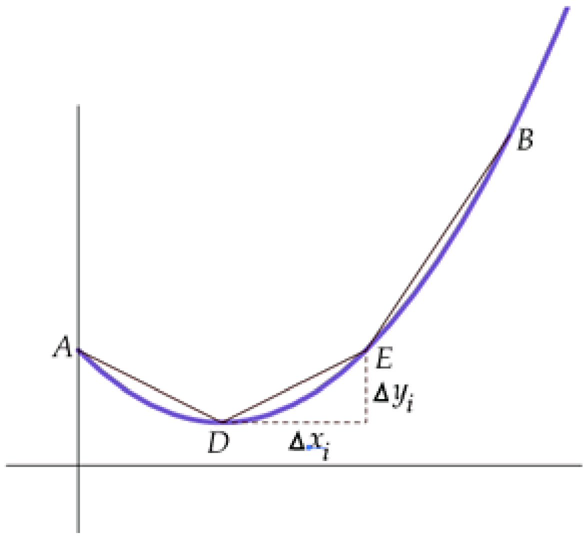
LONGITUD DE UNA CURVA PLANA

Vamos a determinar la longitud S del arco de una curva con ecuación $y = f(x)$, comprendida entre el intervalo $[a,b]$l de su dominio..



Dividiendo el arco AB en n partes, uniendo luego los sucesivos puntos de división por segmentos rectilíneos.

Por ejemplo, el segmento DE tendrá como longitud

$$\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Luego, tendremos una aproximación de la longitud de la curva AB, mediante la suma:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Si aumentamos indefinidamente el número de puntos de división, entonces las longitudes de los segmentos tienden a cero, por lo que:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}$$

nos da el arco AB, siempre que el límite exista.

Para expresar el límite como una integral tenemos lo siguiente: supongamos que la función con ecuación $y = f(x)$ es continua y posee derivada continua en cada punto de la curva, donde $A(a, f(a))$ hasta $B(b, f(b))$. Luego, por el teorema del valor medio para derivadas, existe un punto $D^*\left(x_i^*, y_i^*\right)$ entre los puntos D y E de la curva, donde la tangente es paralela a la cuerda DE, esto es:

$f^{/}\left(x_i^*\right)$ o sea que $\Delta y_i = f^{/}\left(x_i^*\right)\Delta x_i$

Luego

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}$$

Lo cual se puede expresar como:

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_i)^2+\left(f^{/}(x_i^*)\Delta x_i\right)^2}$$

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_i)^2+\left(f^{/}(x_i^*)\right)^2(\Delta x_i)^2}$$

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_i)^2\left(1+\left(f^{/}(x_i^*)\right)^2\right)}$$

$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(f^{/}(x_i^*)\right)^2}\left(\Delta x_i\right)$$

que por definición corresponde a una integral definida:

$$S = \int_a^b \sqrt{1+\left(f^{/}(x)\right)^2}\,dx$$

Como $f^{/}(x) = \dfrac{dy}{dx}$ la expresión nos queda: $S = \int_a^b \sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

Como la longitud de una curva no depende de la elección de los ejes coordenados, si x puede expresarse como función de y, entonces la longitud del arco está dada por

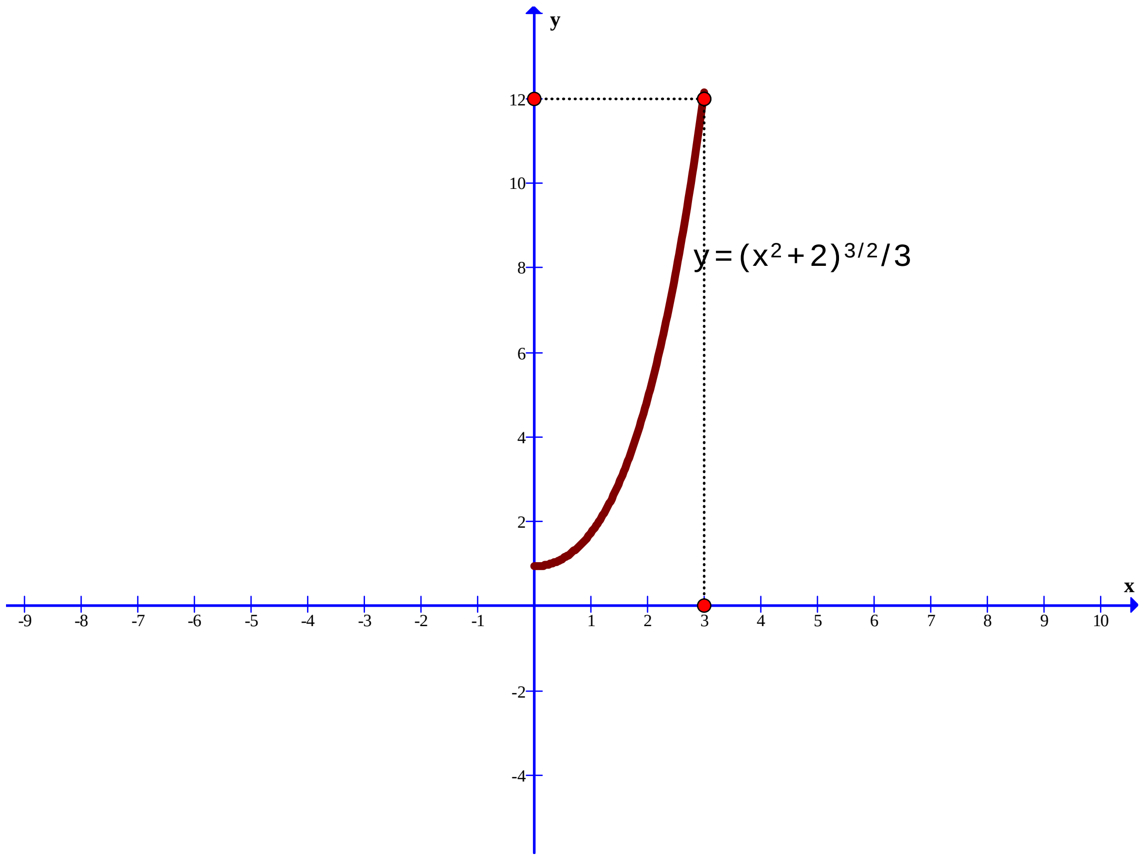
$$S = \int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

Ejemplos

En cada caso calcular la longitud del arco de curva que se indica.

Ejemplo 1: $y = \dfrac{\left(x^2+2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}$, en el intervalo $[0,3]$.

Solución:



Designemos con S la longitud del arco.

$$S=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Derivando la función $y=\dfrac{\left(x^2+2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}$, entonces

$$\frac{dy}{dx}=x\sqrt{x^2+2}$$

Luego:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Reemplazando la derivada

$$S = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(x\sqrt{x^2+2}\right)^2}\, dx$$

Eliminando el radical

$$S = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(x^2(x^2+2)\right)}dx$$

Efectuando la multiplicación indicada

$$S = \int_0^3 \sqrt{1 + x^4 + 2x^2}\, dx$$

Ordenando el trinomio

$$S = \int_0^3 \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}dx$$

Factorizando el trinomio cuadrado perfecto

$$S = \int_0^3 \sqrt{\left(x^2+1\right)^2}\, dx$$

Eliminando el radical

$$S = \int_0^3 \left(x^2+1\right)dx$$

Resolviendo la integral

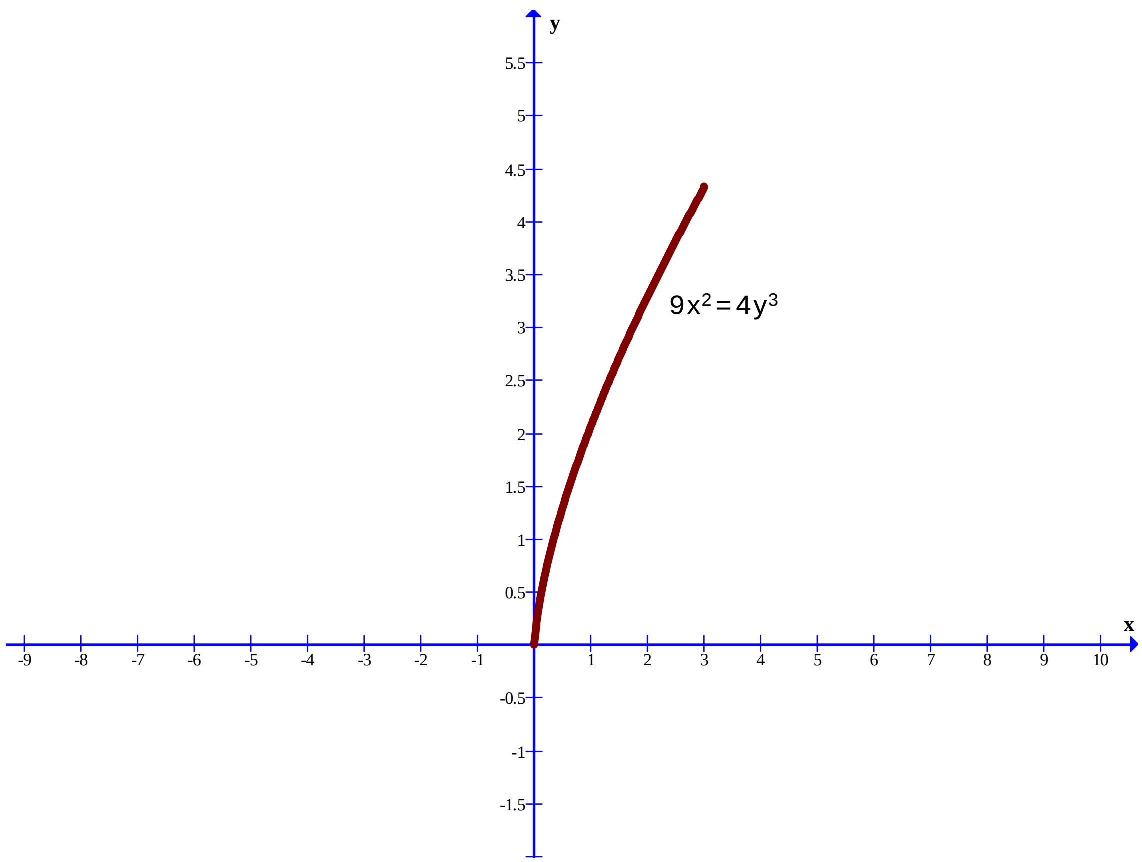
$$S = \left(\frac{x^3}{3} + x \right)_0^3$$

Sustituyendo

$$S = \frac{3^3}{3} + 3 = 9 + 3 = 12$$

Ejemplo 2: $9x^2 = 4y^3$, desde $x = 0$ hasta $x = 2\sqrt{3}$

Solución:



Si derivamos implícitamente la función dada, observamos que la variable q nos queda con exponente 1 , es decir

$$18xdx = 12y^2dy$$

En este caso, tomemos x como variable dependiente y obtengamos la derivada $\frac{dx}{dy}$, con lo que nos queda : $\frac{dx}{dy} = \frac{12y^2}{18x}$ simplificando se llega a $\frac{dx}{dy} = \frac{2y^2}{3x}$

Luego, para determinar la longitud del arco aplicamos la expresión:

$$S = \int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Buscamos los valores correspondientes a los límites de integración

$9(0)^2 = 4y^3$ luego $y = f(a) = 0$

$$9(2\sqrt{3})^2 = 4y^3$$
$$9(4*3) = 4y^3$$
$$27 = y^3$$

luego $y = f(b) = 3$

$$S = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{2y^2}{3x}\right)^2}\, dy$$

$$S=\int_0^3\sqrt{1+\left(\frac{4y^4}{9x^2}\right)}dy$$

Reemplazando $9x^2=4y^3$

$$S=\int_0^3\sqrt{1+\left(\frac{4y^4}{4y^3}\right)}dy$$

Simplificando

$$S=\int_0^3\sqrt{1+y}\,dy$$

Resolviendo la integral

$$S=\frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3$$

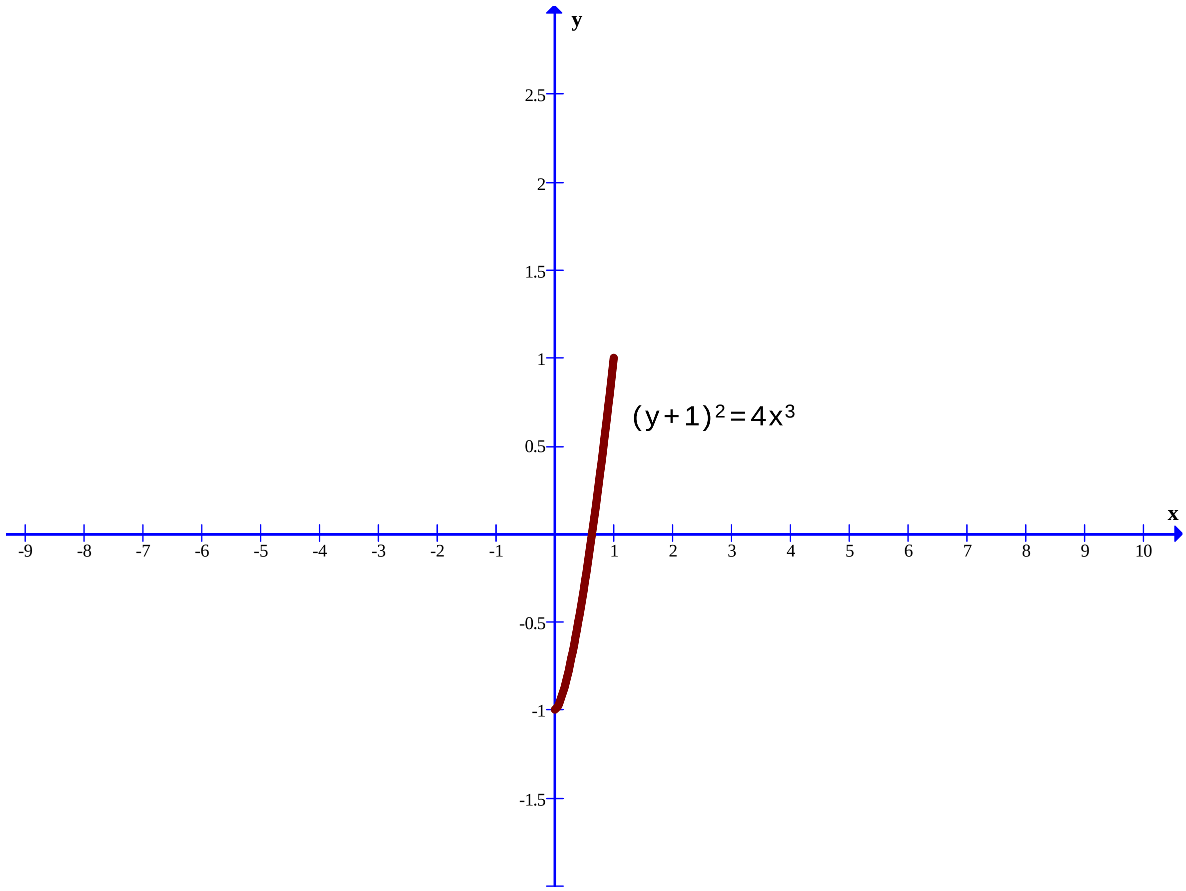
Realizando la sustitución

$$S=\frac{2}{3}\left((1+3)^{\frac{3}{2}}-(1+0)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{2}{3}\left((4)^{3/2}-1\right)$$

$$S=\frac{2}{3}\left(2^3-1\right)=\frac{14}{3}$$

Ejemplo 3: $(y+1)^2 = 4x^3$, desde $x=0$ hasta $x=1$

Solución



Obtengamos $\dfrac{dy}{dx}$ por medio de derivación implícita:

$$2(y+1)\frac{dy}{dx} = 12x^2 \quad \text{donde} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{y+1}$$

Luego

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Reemplazando la derivada

$$S = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{6x^2}{y+1}\right)^2}\, dx$$

$$S = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{36x^4}{(y+1)^2}\right)} dx$$

Realizando sustituciones

$$S = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{36x^4}{4x^3}\right)} dx$$

Simplificando

$$S = \int_0^1 \sqrt{1 + 9x}dx$$

Integrando

$$S = \frac{2}{27}(1 + 9x)^{3/2}\Big|_0^1$$

Evaluando

$$S = \frac{2}{27}\left[(1+9)^{3/2} - (1+0)^{3/2}\right]$$

$$S = \frac{2}{27}\left(\sqrt{10^3} - 1\right)$$

$$S = \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

ACTIVIDAD.

1. Calcule la longitud de arco de la curva $y^2 = x^3$ desde el punto (1 , 1) hasta el punto (4 , 8)
2. Calcule la longitud de arco de la curva $y = \frac{x^2}{2}$ desde el origen hasta el punto $\left(\sqrt{6}, 3\right)$
3. Calcule la longitud de arco de la curva $y = \frac{1}{3}\left(2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}$ desde el punto $\left(0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ hasta el punto $\left(\sqrt{2}, \frac{8}{3}\right)$
4. Encuentre la longitud de la curva $y = \left(2x^2 - 2\right)^{\frac{3}{2}}$ en el intervalo $[2,3]$ de su dominio
5. Determine la longitud del arco de la curva $y = LnSenx$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$